Mathe für Informatiker II
Übungsblatt 11, Aufgabe 78:
Differentiation von Umkehrfunktionen

Gegeben sei folgende Formel:

$$f(y) = M_1 \cdot y + M_2 + M_3 \cdot e^{M_4 \cdot y}$$

Gesucht werden:

$$\begin{aligned} f^{-1}(M_2 + M_3) &= ? & (1) \\ (f^{-1})'(M_2 + M_3) &= ? & (2) \\ (f^{-1})''(M_2 + M_3) &= ? & (3) \end{aligned}$$

Wir wissen aus dem Script (Seite 97) die erste Gleichung. Diese leiten wir erneut ab und erhalten:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} & (4) \\ (f^{-1})''(x) &= -\frac{1}{f'(f^{-1}(x))^2} * f''(f^{-1}(x)) * \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= -\frac{f''(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))^3} & (5) \end{aligned}$$

Nun betrachten wir uns einmal unsere Ausgangsgleichung:

$$\begin{aligned} f(y) &= M_1 \cdot y + M_2 + M_3 \cdot e^{M_4 \cdot y} & (6) \\ f'(y) &= M_1 + M_3 * M_4 \cdot e^{M_4 \cdot y} & (7) \\ f''(y) &= M_3 \cdot M_4^2 \cdot e^{M_4 \cdot y} & (8) \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir (1) in (6) ein.

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(M_2 + M_3)) &= M_1 \cdot y + M_2 + M_3 \cdot e^{M_4 \cdot y} \\ M_2 + M_3 &= M_1 \cdot y + M_2 + M_3 \cdot e^{M_4 \cdot y} \end{aligned}$$

Daraus können wir schlußfolgern, daß y = 0 sein muß. Die e-Funktion ergibt nur im Falle von e^0 eine ganze Zahl, nämlich die 1. Wir wissen somit also:

$$\begin{aligned} f(0) &= M_1 \cdot 0 + M_2 + M_3 \cdot 1 \\ &= M_2 + M_3 & (9) \\ f^{-1}(M_2 + M_3) &= 0 & (10) \end{aligned}$$

Nun benutzen wir unsere Erkenntnisse aus (5) und rechnen damit weiter:

$$
\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\
(f^{-1})'(M_2+M_3) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(M_2+M_3))} \\
&= \frac{1}{f'(0)} \\
&= \frac{1}{M_1+M_3*M_4\cdot e^{M_4\cdot 0}} \\
&= \frac{1}{M_1+M_3*M_4\cdot e^{0}} \\
&= \frac{1}{M_1+M_3*M_4\cdot 1} \\
&= \frac{1}{M_1+M_3*M_4} \qquad (11) \\
(f^{-1})''(x) &= -\frac{f''(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))^3} \\
(f^{-1})''(M_2+M_3) &= -\frac{f''(f^{-1}(M_2+M_3))}{f'(f^{-1}(M_2+M_3))^3} \\
&= -\frac{f''(0)}{f'(0)^3} \\
&= -\frac{M_3\cdot M_4^2\cdot e^{M_4\cdot 0}}{(M_1+M_3*M_4\cdot e^{M_4\cdot 0})^3} \\
&= -\frac{M_3\cdot M_4^2\cdot 1}{(M_1+M_3*M_4\cdot 1)^3} \\
&= -\frac{M_3\cdot M_4^2}{(M_1+M_3*M_4)^3} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst aus den Formeln (10), (11) und (12) haben wir nun unser Ergebniss:

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(M_2+M_3) &= 0 \qquad (13) \\
(f^{-1})'(M_2+M_3) &= \frac{1}{M_1+M_3*M_4} \qquad (14) \\
(f^{-1})''(M_2+M_3) &= -\frac{M_3\cdot M_4^2}{(M_1+M_3*M_4)^3} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Erstellt von Martin Kuhlmann, Juli 2002
Mail: darkjedi@neodoomer.de und
Besucht http://www.upb.de/uninet, wenn ihr Fragen habt!